Retículos modulares y distributivos

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Naciona de La Pampa

2022

Lema

Sea L un retículo. Entonces

1. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.
2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
3. Si $c \leq a$, entonces $(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c)$.
4. Si $a \leq c$, entonces $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

Lema

Sea L un retículo. Entonces

1. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.
2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
3. Si $c \leq a$, entonces $(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c)$.
4. Si $a \leq c$, entonces $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

Lema

Sea L un retículo. Las siguientes son equivalentes:

(D1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

(D2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Lema

Sea L un retículo. Entonces

1. $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.
2. $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
3. Si $c \leq a$, entonces $(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c)$.
4. Si $a \leq c$, entonces $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

Lema

Sea L un retículo. Las siguientes son equivalentes:

(D1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

(D2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Definición 1

Sea L un retículo.

- Diremos que L es distributivo si satisface (D1) (o (D2)).
- Diremos que L es modular si satisface
  $c \leq a \implies a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$.

Proposición

Todo retículo distributivo es modular.

Ejemplo 2

- El retículos $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup \rangle$ es distributivo.
- Cada cadena es un retículo distributivo.
- El retículo $\langle \mathbb{N}, mcd, mcm \rangle$ es distributivo.
- Los retículos $\mathbf{M_3}$ (el diamante) y $\mathbf{N_5}$ (el pentágono) son no distributivos. $\mathbf{M_3}$ es modular y $\mathbf{N_5}$ no es modular.

Proposición

Todo retículo distributivo es modular.

Ejemplo 2

- El retículos $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup \rangle$ es distributivo.
- Cada cadena es un retículo distributivo.
- El retículo $\langle \mathbb{N}, mcd, mcm \rangle$ es distributivo.
- Los retículos $\mathbf{M_3}$ (el diamante) y $\mathbf{N_5}$ (el pentágono) son no distributivos. $\mathbf{M_3}$ es modular y $\mathbf{N_5}$ no es modular.

Proposición

Todo retículo distributivo es modular.

Ejemplo 2

- El retículos $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup \rangle$ es distributivo.
- Cada cadena es un retículo distributivo.
- El retículo $\langle \mathbb{N}, mcd, mcm \rangle$ es distributivo.
- Los retículos $\mathbf{M_3}$ (el diamante) y $\mathbf{N_5}$ (el pentágono) son no distributivos. $\mathbf{M_3}$ es modular y $\mathbf{N_5}$ no es modular.

Proposición

Todo retículo distributivo es modular.

Ejemplo 2

- El retículos $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup \rangle$ es distributivo.
- Cada cadena es un retículo distributivo.
- El retículo $\langle \mathbb{N}, mcd, mcm \rangle$ es distributivo.
- Los retículos $\mathbf{M_3}$ (el diamante) y $\mathbf{N_5}$ (el pentágono) son no distributivos. $\mathbf{M_3}$ es modular y $\mathbf{N_5}$ no es modular.

Proposición

Todo retículo distributivo es modular.

Ejemplo 2

- El retículos $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup \rangle$ es distributivo.
- Cada cadena es un retículo distributivo.
- El retículo $\langle \mathbb{N}, mcd, mcm \rangle$ es distributivo.
- Los retículos $\mathbf{M_3}$ (el diamante) y $\mathbf{N_5}$ (el pentágono) son no distributivos. $\mathbf{M_3}$ es modular y $\mathbf{N_5}$ no es modular.

Subretículos, productos e imágenes homomorfas

Proposición

- Todo subretículo de un retículo distributivo es distributivo.
- Si L y K son retículos distributivo, entonces el retículo producto $L \times K$ es distributivo.
- Si $f \colon L \to K$ es un homomorfismo sobreyectivo y L es distributivo, entonces K es distributivo.

Subretículos, productos e imágenes homomorfas

Proposición

- Todo subretículo de un retículo distributivo es distributivo.
- Si L y K son retículos distributivo, entonces el retículo producto $L \times K$ es distributivo.
- Si $f\colon L \to K$ es un homomorfismo sobreyectivo y L es distributivo, entonces K es distributivo.

Subretículos, productos e imágenes homomorfas

Proposición

- Todo subretículo de un retículo distributivo es distributivo.
- Si L y K son retículos distributivo, entonces el retículo producto $L \times K$ es distributivo.
- Si $f: L \to K$ es un homomorfismo sobreyectivo y L es distributivo, entonces K es distributivo.

Subretículos, productos e imágenes homomorfas

Proposición

- Todo subretículo de un retículo distributivo es distributivo.
- Si L y K son retículos distributivo, entonces el retículo producto $L \times K$ es distributivo.
- Si $f\colon L \to K$ es un homomorfismo sobreyectivo y L es distributivo, entonces K es distributivo.

Subretículos, productos e imágenes homomorfas

Proposición

- Todo subretículo de un retículo distributivo es distributivo.
- Si L y K son retículos distributivo, entonces el retículo producto $L \times K$ es distributivo.
- Si $f\colon L \to K$ es un homomorfismo sobreyectivo y L es distributivo, entonces K es distributivo.

Proposición

Si un retículo es isomorfico a un subretículo de un producto de retículos distributivos, entonces es distributivo.

Teorema: El M_3–N_5 teorema

Teorema

Sea L un retículo. Entonces:

- L es modular si y sólo si L no contiene una copia de N_5.
- L es distributivo si y sólo si L no contiene una copia de N_5 ni de M_3.

Teorema: El M_3–N_5 teorema

Teorema

Sea L un retículo. Entonces:

- L es modular si y sólo si L no contiene una copia de N_5.
- L es distributivo si y sólo si L no contiene una copia de N_5 ni de M_3.

Teorema: El M_3–N_5 teorema

Teorema

Sea L un retículo. Entonces:

- L es modular si y sólo si L no contiene una copia de N_5.
- L es distributivo si y sólo si L no contiene una copia de N_5 ni de M_3.

Retículos booleanos

Definición 3

Sea L un retículo con primer elemento 0 y último elemento 1. Para cada $a \in L$, decimos que $b \in L$ es un complemento de a si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

Retículos booleanos

Definición 3

Sea L un retículo con primer elemento 0 y último elemento 1. Para cada $a \in L$, decimos que $b \in L$ es un complemento de a si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

Si un elemento a tiene un **único** complemento lo denotaremos por a'.

Retículos booleanos

Definición 3

Sea L un retículo con primer elemento 0 y último elemento 1. Para cada $a \in L$, decimos que $b \in L$ es un complemento de a si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

Si un elemento a tiene un **único** complemento lo denotaremos por a'.

Proposición

Sea L un retículo distributivo y $a \in L$. Entonces, a tiene a lo sumo un complemento.

Retículos booleanos

Definición 3

Sea L un retículo con primer elemento 0 y último elemento 1. Para cada $a \in L$, decimos que $b \in L$ es un complemento de a si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

Si un elemento a tiene un **único** complemento lo denotaremos por a'.

Proposición

Sea L un retículo distributivo y $a \in L$. Entonces, a tiene a lo sumo un complemento.

Definición 4

Un retículo L es llamado booleano si

- L es distributivo;
- L tiene primer y último elemento (0 y 1);
- cada $a \in L$ tiene un complemento $a' \in L$.

Proposición

Sea L un retículo booleano. Entonces:

1. $0' = 1$ y $1' = 0$.
2. $a'' = a$.
3. Leyes de De Morgan;

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \qquad \text{y} \qquad (a \wedge b)' = a' \vee b'.$$

4. $a \wedge b' = 0 \iff a \leq b$.
5. $a \leq b \implies b' \leq a'$.

Proposición

Sea L un retículo booleano. Entonces:

1. $0' = 1$ y $1' = 0$.
2. $a'' = a$.
3. Leyes de De Morgan;

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \qquad \text{y} \qquad (a \wedge b)' = a' \vee b'.$$

4. $a \wedge b' = 0 \iff a \leq b$.
5. $a \leq b \implies b' \leq a'$.

Proposición

Sea L un retículo booleano. Entonces:

1. $0' = 1$ y $1' = 0$.
2. $a'' = a$.
3. Leyes de De Morgan;

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \qquad \text{y} \qquad (a \wedge b)' = a' \vee b'.$$

4. $a \wedge b' = 0 \iff a \leq b$.
5. $a \leq b \implies b' \leq a'$.

Proposición

Sea L un retículo booleano. Entonces:

1. $0' = 1$ y $1' = 0$.
2. $a'' = a$.
3. Leyes de De Morgan;

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \qquad \text{y} \qquad (a \wedge b)' = a' \vee b'.$$

4. $a \wedge b' = 0 \iff a \leq b$.
5. $a \leq b \implies b' \leq a'$.

Proposición

Sea L un retículo booleano. Entonces:

1. $0' = 1$ y $1' = 0$.
2. $a'' = a$.
3. Leyes de De Morgan;

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \qquad \text{y} \qquad (a \wedge b)' = a' \vee b'.$$

4. $a \wedge b' = 0 \iff a \leq b$.
5. $a \leq b \implies b' \leq a'$.

Proposición

Sea L un retículo booleano. Entonces:

1. $0' = 1$ y $1' = 0$.
2. $a'' = a$.
3. Leyes de De Morgan;
$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \qquad \text{y} \qquad (a \wedge b)' = a' \vee b'.$$
4. $a \wedge b' = 0 \iff a \leq b$.
5. $a \leq b \implies b' \leq a'$.

Álgebras de Boole

Álgebras de Boole

Definición 5

Un álgebra de Boole es una estructura algebraica $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ tal que

(B1) $\langle B, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo distributivo.

(B2) $a \vee 0 = a$ y $a \wedge 1 = a$.

(B3) $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$.

Álgebras de Boole

Definición 5

Un **álgebra de Boole** es una estructura algebraica $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ tal que

(B1) $\langle B, \wedge, \vee\rangle$ es un retículo distributivo.

(B2) $a \vee 0 = a$ y $a \wedge 1 = a$.

(B3) $a \wedge a' = 0$ y $a \vee a' = 1$.

Definición 6

Un subconjunto A de un álgebra de Boole B es una **subalgebra** si:

1. A es un subretículo de B;
2. $0, 1 \in A$;
3. si $a \in A$, entonces $a' \in A$.

Álgebras de Boole

Definición 7

Dadas álgebras de Boole B y C, una función $f\colon B \to C$ es un homomorfismo booleana si

1. f es un homomorfismo reticular.
2. $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
3. $f(a') = (f(a))'$.

Álgebras de Boole

Definición 7

Dadas álgebras de Boole B y C, una función $f \colon B \to C$ es un homomorfismo booleana si

1. f es un homomorfismo reticular.
2. $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
3. $f(a') = (f(a))'$.

Proposición

Sean B y C álgebras de Boole y $f \colon B \to C$ una función.

1. Si f es un homomorfismo reticular, entonces las siguientes son equivalentes:
   1.1 $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$;
   1.2 $f(a') = (f(a))'$.
2. Si f preserva $'$, entonces f preserva $\vee$ si y sólo si f preserva $\wedge$.

Álgebras de Boole

Definición 7

Dadas álgebras de Boole B y C, una función $f\colon B \to C$ es un homomorfismo booleana si

1. f es un homomorfismo reticular.
2. $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
3. $f(a') = (f(a))'$.

Proposición

Sean B y C álgebras de Boole y $f\colon B \to C$ una función.

1. Si f es un homomorfismo reticular, entonces las siguientes son equivalentes:
   1.1 $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$;
   1.2 $f(a') = (f(a))'$.
2. Si f preserva $'$, entonces f preserva $\vee$ si y sólo si f preserva $\wedge$.

Álgebras de Boole

Definición 7

Dadas álgebras de Boole B y C, una función $f\colon B \to C$ es un homomorfismo booleana si

1. f es un homomorfismo reticular.
2. $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
3. $f(a') = (f(a))'$.

Proposición

Sean B y C álgebras de Boole y $f\colon B \to C$ una función.

1. Si f es un homomorfismo reticular, entonces las siguientes son equivalentes:
   1.1 $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$;
   1.2 $f(a') = (f(a))'$.
2. Si f preserva $'$, entonces f preserva $\vee$ si y sólo si f preserva $\wedge$.

Ejemplos de álgebras de Boole

- $\mathbf{2}$ es un retículo booleano.
- $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole.
- El producto de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{2}^n$ es un álgebra de Booble. En particular, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ y $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2}$ son álgebras de Boole.
- El álgebra finita-cofinita del conjunto X es definida por

$$FC(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}.$$

Es es un álgebra de Boole de conjuntos.

Ejemplos de álgebras de Boole

- $\mathbf{2}$ es un retículo booleano.
- $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole.
- El producto de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{2}^n$ es un álgebra de Booble. En particular, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ y $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2}$ son álgebras de Boole.
- El álgebra finita-cofinita del conjunto X es definida por

$$FC(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}.$$

Es es un álgebra de Boole de conjuntos.

Ejemplos de álgebras de Boole

- $\mathbf{2}$ es un retículo booleano.
- $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole.
- El producto de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{2}^n$ es un álgebra de Booble. En particular, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ y $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2}$ son álgebras de Boole.
- El álgebra finita-cofinita del conjunto X es definida por

$$FC(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}.$$

Es es un álgebra de Boole de conjuntos.

Ejemplos de álgebras de Boole

- $\mathbf{2}$ es un retículo booleano.
- $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole.
- El producto de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{2}^n$ es un álgebra de Booble. En particular, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ y $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2}$ son álgebras de Boole.
- El álgebra finita-cofinita del conjunto X es definida por

$$FC(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}.$$

Es es un álgebra de Boole de conjuntos.

Ejemplos de álgebras de Boole

- $\mathbf{2}$ es un retículo booleano.
- $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole.
- El producto de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{2}^n$ es un álgebra de Booble. En particular, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ y $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2}$ son álgebras de Boole.
- El álgebra finita-cofinita del conjunto X es definida por

  $$FC(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}.$$

  Es es un álgebra de Boole de conjuntos.

Ejercicios propuestos

Pag. 104

4.3 – 4.4 – 4.9 – 4.11 – 4.12 – 4.21 – 4.22 – 4.25 – 4.27

Ejercicio 1

Probar que la identidad

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$$

es equivalente a la condición

$$z \leq x \implies (x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z).$$

Ejercicio 2

Sean L y K retículos distributivos. ¿Es el retículo $L \oplus K$ distributivo?

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3

Sea L un retículo distributivo.

(a) Sean I y J ideales de L. Probar que el conjunto

$$I \vee J = \{a \vee b : a \in I \ \text{ y } \ b \in J\}$$

es el menor ideal de L que contiene a $I \cup J$.

(b) Probar que $\langle \mathrm{Id}(L), \cap, \vee \rangle$ es un retículo distributivo.

Ejercicio 4

Sea L un retículo distributivo.

(a) Sean F y G filtros de L. Probar que el conjunto

$$F \vee G = \{a \wedge b : a \in F \ \text{ y } \ b \in G\}$$

es el menor filtro de L que contiene a $F \cup G$.

(b) Probar que $\langle \mathrm{Fi}(L), \cap, \vee \rangle$ es un retículo distributivo.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5

Sea L un retículo distributivo acotado. Probar que el conjunto

$$C = \{a \in L : a \text{ es complementado}\}$$

de elementos complementados de L es un subretículo L, y es además un retículo booleano.